Quantum Painleve systems (Recent Trends in Integrable Systems)

AUTHOR(S):
名古屋, 創

CITATION:
名古屋, 創. Quantum Painleve systems (Recent Trends in Integrable Systems). 数理解析研究所講究録 2009, 1650: 75-86

ISSUE DATE:
2009-05

URL:
http://hdl.handle.net/2433/140773

数理解析研究所講究録
第 1650 巻 2009 年 75-86

Quantum Painlevé systems

慶應義塾大学大学院理工学研究科　名古屋 創　(Hajime Nagoya)
School of Fundamental Science and Technology,
Keio University

1 Introduction

量子 Painlevé 方程式とは, Painlevé 方程式が解を解に移す変換として持つアフィン Weyl 群対称性を受け継ぐ量子化のことである. ここで量子化とは, Poisson 括弧と対応する交換関係もつ対象を指す. アフィン Weyl 群対称性を持つ量子化はすべての Painlevé 方程式に対して構成できる. ただし, P_{I} は対称性を持たないが正準座標が分離している Hamiltonian を持つので, その量子化は決定されているとみている.

Painlevé 方程式はソリトン方程式に対する相似簡約で得られる. 一方, ソリトン方程式の量子化は知られている. 量子 Painlevé 方程式は量子ソリトン方程式からの何らかの簡約で得られることが期待されている.

また, Painlevé 方程式はモノドロミー保存変形から得られることが知られている. 特に確定特異点型の線形微分方程式に対する変形を考え得られる非線形微分方程式系, Schlesinger 系の特別な場合から P_{VI} が得られる. 不確定特異点度を増やした場合からは残りの Painlevé 方程式がすべて得られる. Schlesinger 方程式の Poisson 括弧を交換子に置き換える意味での量子化は共形場理論における相関関数の満たす微分方程式である Knizhnik-Zamolodchikov 方程式とみなせる. 古典と同様に Hamiltonian reduction によって KZ 方程式から量子 P_{VI} が得られることが期待されている. 現在までに不確定特異点度を増やした合流型 KZ 方程式から量子 P_{VI} 以外の量子 Painlevé 方程式が得られることがわかっている.

上記の量子ソリトンとの関連, KZ 方程式との関連は量子 Painlevé 方程式を研究する 2 つの大きな筆者の動機である.

本稿では, 量子 P_{IV} を用いて具体的に対称性を受け継ぐ量子化を構成する計算をみる. その後一般的な構成を行う.

2 Quantum $\mathrm{P_{IV}}$

まず最初に, 古典 $\mathrm{P_{IV}}$ を紹介する. 古典 $\mathrm{P_{IV}}$ とは次の微分方程式系

$$
\begin{aligned}
f_1' &= f_1(f_2 - f_3) + \alpha_1,\\
f_2' &= f_2(f_3 - f_1) + \alpha_2,\\
f_3' &= f_3(f_1 - f_2) + \alpha_3
\end{aligned}
$$

のことである. ただし, $f_i = f_i(t)$, $' = \frac{d}{dt}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ とする. 特にこの方程式系は $\mathrm{P_{IV}}$ の対称形式と呼ばれている. 以後, 添え字は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の元としてみる. $\mathrm{P_{IV}}$ は Hamiltonian

$$
H_{IV} = f_1f_2f_3 + \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)f_1 - \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2)f_2 + \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha_2)f_3 \tag{1}
$$

と Poisson 括弧

$$
\{f_i, f_{i+1}\} = 1, \quad \{f_i, \alpha_j\} = \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \tag{2}
$$

で Hamiltonian 系

$$
f_i' = \{H, f_i\} + \delta_{i,0} \tag{3}
$$

として書かれる. ここで $\delta_{i,0}$ は $\mathrm{P_{IV}}$ の Hamiltonian が時間 t によることからくる.

アフィン Weyl 群対称性について説明するために有理関数体 $K = \mathbb{C}(f_i, \alpha_i)$ を用いる. K 上の準同型 s_i $(i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ を

$$
\begin{aligned}
&s_i(f_i) = f_i, \quad s_i(f_{i\pm1}) = f_{i\pm1} \pm \frac{\alpha_i}{f_i},\\
&s_i(\alpha_i) = -\alpha_i, \quad s_i(\alpha_{i\pm1}) = \alpha_{i\pm1} + \alpha_i
\end{aligned}
$$

で定める. このとき, 準同型 s_i は $A_2^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群の表現を定め, すなわち s_i たちは次の関係式

$$
s_i^2 = 1, \quad (s_is_{i+1})^3 = 1
$$

を満たし, $\mathrm{P_{IV}}$ の解を解に移す変換, すなわち次式

$$
s_i(f_j)' = s_i(f_j)(s_i(f_{j+1}) - s_i(f_{j-1})) + s_i(\alpha_j)
$$

が成り立つ. これらのことから, $\mathrm{P_{IV}}$ は $A_2^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群対称性を持つという.

この P_{IV} を Poisson 括弧を交換子に置き換える意味での量子化をアフィン Weyl 群対称性を持つように構成しよう．一つ目の問題はアフィン Weyl 群の表現をどのように構成するかである．つまり, Poisson 括弧を交換子に置き換えて出来る斜体, 生成元が $\hat{f}_i$, α_i $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ で定義関係式が

$$[\hat{f}_i, \hat{f}_{i+1}] = h, \quad [\hat{f}_i, \alpha_j] = [\alpha_i, \alpha_j] = 0, \quad (h \in \mathbb{C}) \tag{4}$$

である $\mathbb{C}$ 上の斜体 $\mathcal{K}$ に $A_2^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群の表現で $h=0$ のときに古典 P_{IV} のそれと一致するものをどのように構成するかである．この問題は長谷川 [8] によって解かれた．答えは, 単に s_i $(i \in \mathbb{Z})$ を生成元に対して

$$s_i(\hat{f}_i) = \hat{f}_i, \quad s_i(\hat{f}_{i\pm1}) = \hat{f}_{i\pm1} \pm \frac{\alpha_i}{\hat{f}_i},$$
$$s_i(\alpha_i) = -\alpha_i, \quad s_i(\alpha_{i\pm1}) = \alpha_{i\pm1} + \alpha_i.$$

と定めればよい．ここで $\frac{1}{\hat{f}_i}$ は本来 $\hat{f}_i^{-1}$ と書くものだが, α_i とは可換なのでこのように書く．s_i たちは $\mathcal{K}$ の定義関係式を保存するため $\mathcal{K}$ 上の準同型となり $A_2^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群の表現を与える．

2 つ目の問題は上記の $A_2^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群対称性をもつ微分方程式系で $h=0$ のとき古典 P_{IV} に一致するものの構成である．P_{IV} のハミルトニアンに $\hat{f}_i$ を代入して得られる量子 Hamiltonian ををどのように定めるか（順序問題）を考えればよいが、より具体的には古典のときの次の関係式

$$s_i(H_{IV}) = H_{IV} + \delta_{i,0}\frac{\alpha_0}{\hat{f}_0} \tag{5}$$

を保つように量子 Hamiltonian を構成すれば, 後は古典と同様に s_i が Bäcklund 変換であることが証明される．Hamiltonian

$$\widehat{H}_{IV} = \hat{f}_0\hat{f}_1\hat{f}_2 + h\hat{f}_1 + \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha_2)\hat{f}_0 + \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)\hat{f}_1 - \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2)\hat{f}_2$$

に対して, s_i の作用を計算すると, (5) を満たすことが分かる．この計算を s_1 の場合に見る．

$$\begin{aligned} s_i(\widehat{H}_{IV}) =& (\hat{f}_0 - \frac{\alpha_1}{\hat{f}_1})\hat{f}_1(\hat{f}_2 + \frac{\alpha_1}{\hat{f}_1}) + h\hat{f}_1 + \frac{1}{3}(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_1)(\hat{f}_0 - \frac{\alpha_1}{\hat{f}_1}) \\ &+ \frac{1}{3}(-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_1)\hat{f}_1 - \frac{1}{3}(-2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1)(\hat{f}_2 + \frac{\alpha_1}{\hat{f}_1}) \\ =& \widehat{H}_{IV}. \end{aligned}$$

まとめると $\mathcal{K}$ 上の $\mathbb{C}$-derivation ∂_{IV} を

$$\partial_{IV}(\hat{f}_i) = \frac{1}{h}[\widehat{H}_{IV}, \hat{f}_i] + \delta_{i,0} \tag{6}$$

で定めれば, ∂_{IV} と s_i は可換になる. $h = 0$ のとき古典 $\mathrm{P_{IV}}$ と微分方程式 (6) が一致することは明らかであろう. 方程式 (6) を量子 $\mathrm{P_{IV}}$ と呼ぶ.

同様な量子化を野海・山田による一般に高階の $A_l^{(1)}$ 型対称性を持つ微分方程式系 [19] に対して構成することができる [14].

当初, 量子化された Hamiltonian は上記のように手で見つけたがその後 Lax 形式を用いて理解されることが黒木によって指摘された [13]. そのことを量子 $\mathrm{P_{IV}}$ の Lax 形式を具体的に書くことで説明しよう.

行列 M, B を

$$M = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \hat{f}_1 & 1 \\ z & \epsilon_2 & \hat{f}_2 \\ z\hat{f}_3 & z & \epsilon_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \hat{f}_2 + \hat{f}_1 & 1 & 0 \\ 0 & \hat{f}_3 + \hat{f}_2 & 1 \\ z & 0 & \hat{f}_1 + \hat{f}_3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

で定める. このとき次が成り立つ.

$$[z\partial_z + M, \partial_{IV} + B] = 0. \tag{8}$$

すぐに確かめることが出来るが, 変数が非可換であるためこの式が成り立つことは非自明なことである. さらに Hamiltonian $\widehat{H}_{IV}$ は

$$\frac{\mathrm{tr}(M^3)}{3} \text{の } z \text{ の係数} \tag{9}$$

と同値である. また $B = (M^2 z^{-1})_{\geq 0}$ も成り立つ. ここで ≥ 0 は単に上三角行列に含まれるという意味である. このことは M を一つ与えれば, そこから性質の良い (非可換) 微分方程式系が得られることを示唆する. この観点から得られたのが次節で紹介する A 型に対する一般化である.

3 Quantum Painlevé Systems of type $A_{n-1}^{(1)}$

3.1 Lax equations

$\mathcal{K}_{m,n}$ $(m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$ を次の生成元と関係式で定まる $\mathbb{C}$ 上の斜体とする.

$$\text{生成元:} \quad \hat{f}_{i,i+j}, \epsilon_i \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1) \tag{10}$$

関係式: ϵ_iは他と可換, (11)

$$[\hat{f}_{ij}, \hat{f}_{kl}] = h(\delta_{j,k}\hat{f}_{i,l+j-k} - \delta_{l,i}\hat{f}_{k,l+j-i}), \tag{12}$$

ただし $h \in \mathbb{C}$ とし

$$\hat{f}_{ij} = \begin{cases} 1 & (j-i=m) \\ 0 & (j-i>m) \end{cases} \tag{13}$$

とする. 定義関係式は $\hat{f}_{i,j+ns}$ を $z^{-s}E_{ji}$ と見たものに対応している. (E_{ij} は行列単位) $e_{i,j+ns} = z^s E_{ij}$ $(1 \le i,j \le n)$ とおく.

Definition 1 $\mathcal{K}_{m,n}[z,z^{-1}]$ を z, z^{-1} の多項式環とし, $Mat(n, \mathcal{K}_{m,n}[z,z^{-1}])$ の元である行列 M を次で定める.

$$M = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}\epsilon_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \hat{f}_{i,i+j}e_{i,i+j}. \tag{14}$$

行列 M の例として $m=3$, $n=4$ のときを挙げる.

$$M = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \hat{f}_{12} & \hat{f}_{13} & 1 \\ z & \epsilon_2 & \hat{f}_{23} & \hat{f}_{24} \\ z\hat{f}_{35} & z & \epsilon_3 & \hat{f}_{34} \\ z\hat{f}_{45} & z\hat{f}_{46} & z & \epsilon_4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

このように変数の場所と添え字が一致している.

∂_z を $\mathcal{K}_{m,n}[z,z^{-1}]$ の $\mathcal{K}_{m,n}$-derivation で z を 1 に移すものとする.

Theorem 2 $s,k \in \mathbb{N}$ とし $mk > ns > m(k-1)$ と仮定する. このとき $\mathcal{K}_{m,n}[z,z^{-1}]$ の生成元に対し変換 $\partial_{s,k}$ を次の *Lax* 方程式で定める.

$$\partial_{s,k}(M) = [M, B_{s,k}] + \kappa z \partial_z(B_{s,k}), \tag{16}$$

ただし $B_{s,k} = (M^k z^{-s})_{\ge 0}$, $\kappa \in \mathbb{C}$ とする. このとき, 変換 $\partial_{s,k}$ は $\mathcal{K}_{m,n}[z,z^{-1}]$ 上の $\mathbb{C}[z,z^{-1}]$-*derivation* を定める.

derivation $\partial_{s,k}$ が $\mathcal{K}_{m,n}$ の定義関係式を満たすことが定理の主張である. また条件 $mk > ns > m(k-1)$ は Lax 方程式の形から自然に要請される. この定理の証明においては, $\hat{f}_{i,i+m} = 1$ である必要はない.

例として, $n=3$, $m=2$, $s=1$, $k=2$ のときが量子 $\mathrm{P_{IV}}$ である.

3.2 Affine Weyl group symmetry

Definition 3 行列 G_i $(1 \leq i \leq n)$ を次で定義する.

$$G_i = \exp\left(E_{i+1,i}\frac{\alpha_i}{\hat{f}_{i,i+1}}\right) \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad G_n = \exp\left(z^{-1}E_{1,n}\frac{\alpha_i}{\hat{f}_{i,i+1}}\right) \tag{17}$$

ただし $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $\alpha_n = \epsilon_n - \epsilon_1 + \kappa$.

Proposition 4 $\mathcal{K}_{m,n}$ の生成元に対する変換 s_i $(1 \leq i \leq n)$ を次で定める.

$$\kappa z\partial_z + s_i(M) = G_i(\kappa z\partial_z + M)G_i^{-1}. \tag{18}$$

このとき, s_i は $\mathcal{K}_{m,n}$ 上の準同型を定める.

この命題も (18) で定義される変換 s_i が定義関係式を満たすことを主張している.

Theorem 5 *(1)* s_i $(1 \leq i \leq n)$ は $\mathcal{K}_{m,n}$ 上に $A^{(1)}_{n-1}$ 型アフィン *Weyl* 群の表現を構成する. すなわち次の関係式を満たす.

$$s_i^2 = 1, \quad (s_is_j)^3 = 1\ (j = i \pm 1), \quad s_is_j = s_js_i\ (j \neq i \pm 1), \tag{19}$$

ただし $n = 2$ のときは $(s_is_{i\pm1})^3 = 1$ はみたさない.

(2) $s, k \in \mathbb{N}$ に対して, s_i $(1 \leq i \leq n)$ は $\partial_{s,k}$ と可換である.

すなわち前節で構成した Lax 方程式は $A^{(1)}_{n-1}$ 型のアフィン Weyl 群対称性を持つ.

3.3 Hamiltonians

$g(z) \in \mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}]$ に対して g_i を z^i の係数とする.

Definition 6 *(Hamiltonians)* $s, k \in \mathbb{N}$ に対して, $\widehat{H}_{s,k} \in \mathcal{K}_{m,n}$ を次式で定める.

$$\widehat{H}_{s,k} = \frac{\mathrm{tr}\left(M^{k+1}\right)_s}{k+1}. \tag{20}$$

$m=2,\ n=3,\ s=1,\ k=2$ のとき

$$\widehat{H}_{1,2}=\mathrm{tr}\left(\frac{M^3}{3}\right)_1=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\hat{f}_{i,i+1}\hat{f}_{i+1,i+2}\hat{f}_{i+2,i+3}+\sum_{i=1}^{3}\epsilon_i(\hat{f}_{i,i+1}+\hat{f}_{i+2,i+3}). \tag{21}$$

$\widehat{H}_{1,2}$ は量子 $\mathrm{P_{IV}}$ のハミルトニアンである [14].

$r\in\mathbb{N}$ に対して, $\bar{r}$ $(0\le\bar{r}\le m-1)$ を m で割ったあまりとする. 集合 $A_{m,n}$ を次で定める.

$$A_{m,n}=\left\{(s,k)\in\mathbb{N}^2\ \middle|\ \begin{array}{l} ns=mk\\ \text{or}\\ mk>ns>m(k-1),\quad \overline{ns}\ge\overline{n},\overline{2n},\dots,\overline{n(s-1)}\end{array}\right\}. \tag{22}$$

Theorem 7 $(s,k),(s',k')\in A_{m,n}$ であればこのとき次が成立する.

$$\frac{1}{h}\left[\widehat{H}_{s,k},M\right]=[M,B_{s,k}], \tag{23}$$

$$\left[\widehat{H}_{s,k},\widehat{H}_{s',k'}\right]=0. \tag{24}$$

この定理の証明は, 成分が非可換である行列 A,B に対して, $\mathrm{tr}(AB)\ne\mathrm{tr}(BA)$ となることからくるおまけが 0 になることを定義関係式から計算する. 交換子を Poisson 括弧に置き換えて構成される古典系のときは, $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ であることから計算は自明なものとなる.

古典系においては, すべての自然数 s,k に対して Hamiltonian $H_{s,k}$ は相互に可換である. 量子系においては Hamiltonian の定義を変える必要があると考えている. 一般にはトレースで定義された Hamiltonian に対しては補正項を付け加えることで古典系と同数の可換な Hamiltonian を構成することが出来る. 一つの具体例を挙げよう.

$n=4,\ m=3$ とする. 簡便のため $\hat{f}_{i,i+1}=\hat{f}_i,\ \hat{f}_{i,i+2}=\hat{g}_i$ $(i=1,2,3,4)$ とおく. $(s,k)=(1,2),(2,3)$ は定理の条件を満たすので, 対するハミルトニアン

$$\widehat{H}_{1,2}=\left(\frac{\mathrm{tr}(M^3)}{3}\right)_1=\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{3}\left(\hat{f}_i\hat{f}_{i+1}\hat{g}_{i+2}+\hat{f}_{i+1}\hat{g}_{i+2}\hat{f}_i+\hat{g}_{i+2}\hat{f}_i\hat{f}_{i+1}\right)\right.$$
$$\left.+\epsilon_i(\hat{f}_i+\hat{f}_{i+3}+\hat{g}_i\hat{g}_{i+2})\right],$$

$$\widehat{H}_{2,3} = \left(\frac{\mathrm{tr}(M^4)}{4}\right)_2 = \sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{4}\hat{g}_i^2\hat{g}_{i+2}^2 + \hat{f}_i\hat{f}_{i+1} + \hat{f}_i^2 + \hat{f}_i(\hat{g}_{i+1}\hat{g}_{i+3} + \hat{g}_{i+1}\hat{g}_{i+2} + \hat{g}_i\hat{g}_{i+2}) \right.$$
$$\left. + \epsilon_i(\hat{g}_i + \hat{g}_{i+3} + \hat{g}_{i+2})\right] + C_{2,3},$$

は可換である. ($C_{2,3}$ は中心元) $(s,k) = (1,3)$ は条件を満たさず実際 $\widehat{H}_{1,3}$

$$\widehat{H}_{1,3} = \left(\frac{\mathrm{tr}(M^4)}{4}\right)_2 = \sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{4}\hat{f}_i\hat{f}_{i+1}\hat{f}_{i+2}\hat{f}_{i+3} + \frac{1}{4}(2\epsilon_i + \epsilon_{i+1} + \epsilon_{i+2})\hat{f}_i\hat{f}_{i+1}\hat{g}_{i+2}\right.$$
$$+ \frac{1}{4}(2\epsilon_i + \epsilon_{i+1} + \epsilon_{i+3})\hat{f}_i\hat{g}_{i+1}\hat{f}_{i+3} + \frac{1}{4}(2\epsilon_i + \epsilon_{i+2} + \epsilon_{i+3})\hat{g}_i\hat{f}_{i+2}\hat{f}_{i+3}$$
$$\left. + \epsilon_i^2(\hat{f}_i + \hat{f}_{i+3} + \hat{g}_i\hat{g}_{i+2}) + \frac{1}{2}\epsilon_i\epsilon_{i+2}\hat{g}_i\hat{g}_{i+2} + \epsilon_i\epsilon_{i+1}\hat{f}_i\right].$$

は $\widehat{H}_{1,2}$, $\widehat{H}_{2,3}$ とは可換でないが, 補正項を

$$\widehat{H}'_{1,3} = \widehat{H}_{1,3} - \frac{h}{4}\sum_{i=1}^{4}\epsilon_i(\hat{f}_i + \hat{f}_{i+3} + \hat{g}_i\hat{g}_{i+2})$$

と付け足した $\widehat{H'}_{1,3}$ は $\widehat{H}_{1,2}$, $\widehat{H}_{2,3}$ と可換になる.

4 量子 $\mathrm{P_{VI}}$ の Hamiltonian

最後に, $D_4^{(1)}$ 対称性を持つ量子 $\mathrm{P_{VI}}$ を説明する. まず, 古典 $\mathrm{P_{VI}}$ の Hamiltonian と $D_4^{(1)}$ 対称性を説明する.

古典 $\mathrm{P_{VI}}$ の Hamiltonian は次式で与えられる.

$$H_{VI} = \frac{1}{t(t-1)}\left[p^2q(q-1)(q-t) - p\{(\alpha_0-1)q(q-1) + \alpha_3q(q-t) + \alpha_4(q-1)(q-t)\}\right.$$
$$\left. + \alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)(q-t)\right],$$

ただし, q, p は t の関数で α_i $(i = 0,1,2,3,4)$ は複素数値のパラメータとする. また $\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$ と正規化しておく. このとき, 古典 $\mathrm{P_{VI}}$ は次の Hamiltonian 系

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p} \tag{25}$$

として書かれる.

古典 P_{VI} は Bäcklund 変換として $D_4^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群の作用を持つ. この作用を説明するため, 次の有理関数体

$$K = \mathbb{C}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, q, p, t) \tag{26}$$

と Poisson 括弧

$$\{p, q\} = 1, \quad \{p, \alpha_i\} = \{q, \alpha_i\} = \{p, t\} = \{q, t\} = \{t, \alpha_i\} = 0 \quad (1 \leq i \leq 4) \tag{27}$$

を導入する.

さらに φ_i を

$$\varphi_0 = q - t, \quad \varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = -p, \quad \varphi_3 = q - 1, \quad \varphi_4 = q \tag{28}$$

によって導入し, 有理関数体 K 上の準同型 s_i $(0 \leq i \leq 4)$ を

$$s_i(\alpha_j) = \alpha_j - \alpha_i a_{ij}, \quad s_i(\varphi_j) = \varphi_j + \{\varphi_i, \varphi_j\}\frac{\alpha_i}{\varphi_i} \quad (0 \leq i, j \leq 4) \tag{29}$$

で定義する. ただし, $A = (a_{ij})$ は $D_4^{(1)}$ 型の Cartan 行列:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

である.

準同型 s_i $(0 \leq i \leq 4)$ が $D_4^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群の表現をあたえ, $\frac{d}{dt}$ と可換となる. この事実を持って P_{VI} は $D_4^{(1)}$ 対称性を持つという.

上記の Poisson 括弧を交換子に置き換えた非可換代数を用意し, その上に $D_4^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群の表現とそれと可換なハミルトニアン作用を構成する.

斜体 $\mathcal{K}$ を $\mathbb{C}$ 上 $\hat{q}$, $\hat{p}$, α_1, α_2, α_3, α_4, t で生成され次の関係式

$$[\hat{p}, \hat{q}] = h, \quad [\hat{p}, \alpha_i] = [\hat{q}, \alpha_i] = [\hat{p}, t] = [\hat{q}, t] = [t, \alpha_i] = 0 \quad (1 \leq i \leq 4) \tag{31}$$

で定まるものとする. 斜体 $\mathcal{K}$ の実現はたとえば Weyl 代数 $\mathbb{C}\langle\partial_x, x\rangle$ に t を付加してできる斜体である.

Hamiltonian の構成の仕方は原理的には量子 $\mathrm{P_{IV}}$ のときと同じである. Hamiltonian $\widehat{H}_{VI}$ を次式

$$
\begin{aligned}
t(t-1)\widehat{H}_{VI} =& \frac{1}{6}\,[\hat{q}\hat{p}(\hat{q}-1)\hat{p}(\hat{q}-t)+(\hat{q}-1)\hat{p}(\hat{q}-t)\hat{p}\hat{q}+(\hat{q}-t)\hat{p}\hat{q}\hat{p}(\hat{q}-1)+ \\
& (\hat{q}-t)\hat{p}(\hat{q}-1)\hat{p}\hat{q}+(\hat{q}-1)\hat{p}\hat{q}\hat{p}(\hat{q}-t)+\hat{q}\hat{p}(\hat{q}-t)\hat{p}(\hat{q}-1)] \\
& +\frac{1}{2}\,[(\alpha_0-1)(\hat{q}\hat{p}(\hat{q}-1)+(\hat{q}-1)\hat{p}\hat{q})+\alpha_3(\hat{q}\hat{p}(\hat{q}-t)+(\hat{q}-t)\hat{p}\hat{q}) \\
& \alpha_4((\hat{q}-1)\hat{p}(\hat{q}-t)+(\hat{q}-t)\hat{p}(\hat{q}-1))]+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)(\hat{q}-t)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

で定める. $h=0$ であれば古典 $\mathrm{P_{VI}}$ の Hamiltonian H_{VI} と一致している. なお上記は非可換定数 h が明示されない形に書いている.

アフィン Weyl 群作用は古典の場合と同じように

$$
s_i(\alpha_j)=\alpha_j-\alpha_i a_{ij},\quad s_i(\varphi_j)=\hat{\varphi}_j+\frac{1}{h}[\hat{\varphi}_i,\hat{\varphi}_j]\frac{\alpha_i}{\hat{\varphi}_i}\quad (0\le i,j\le 4) \tag{33}
$$

ただし

$$
\hat{\varphi}_0=\hat{q}-t,\quad \hat{\varphi}_1=1,\quad \hat{\varphi}_2=-\hat{p},\quad \hat{\varphi}_3=\hat{q}-1,\quad \hat{\varphi}_4=\hat{q} \tag{34}
$$

と定めることができる.

$\mathcal{K}$ 上の derivation ∂_t を

$$
\partial_t(\hat{q})=\frac{1}{h}[\widehat{H}_{VI},\hat{q}],\quad \partial_t(\hat{p})=\frac{1}{h}[\widehat{H}_{VI},\hat{p}] \tag{35}
$$

で定めると, s_i は ∂_t と可換となり, また s_i $(0\le i\le 4)$ が $D_4^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群の表現を与える.

参考文献

[1] Harnad, J.: Quantum isomonodromic deformations and the Knizhnik-Zamolodchikov equations. Symmetries and integrability of difference equations (Estérel, PQ, 1994), 155–161, CRM Proc. Lecture Notes, 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996

[2] Hasegawa, K.: Quantizing the Bačklund transformations of Painlevé equations and the quantum discrete Painleve' VI equation, arXiv: math/0703036

[3] Jimbo, M., Miwa, T., and Ueno, K.: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients I, General theory and τ-function, Phys. D **2** (1981), 306–352

[4] Jimbo, M., Miwa, T.: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II, III, Phys. D **2** (1981) 407–448; Phys. D **4** (1981/1982), 26–46

[5] Kakei, S., Kikuchi, T.: Affine Lie group approach to a derivative nonlinear Schrödinger equation and its similarity reduction, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 78, 4181–4209.

[6] Kuroki, G.: private communication

[7] Nagoya, H.: Quantum Painlevé Systems of Type $A_l^{(1)}$, Int. J. Math. **15** (2004), no. 10, 1007–1031

[8] Nagoya, H.: Quantum Painlevé Systems of Type $A_{n-1}^{(1)}$ with higher degree Lax operators, Int. J. Math. **18** (2007), no. 7, 839–868

[9] Nagoya, H.: A quantization of the Sixth Painlevé equation, preprint

[10] Nagoya, H.: Quantum Painlevé systems with affine Weyl group symmetry of type $C_l^{(1)}$, preprint

[11] Noumi, M. and Yamada, Y.: Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **199**, (1998), no. 2, 281–295

[12] Noumi, M. and Yamada, Y.: Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, Funkcial. Ekvac. **41** (1998), 483–503

[13] Okamoto, K.: Studies on the Painlevé equations, I: Ann. Math. Pura. Appl. (4) **146** (1987),337–381; II: Jap. J. Math. **13** (1987), no. 1, 47–76; III: Math. Ann. **275** (1986), no. 2, 221–255; IV: Funkcial. Ekvac. **30** (1987), no. 2-3, 305–332

[14] Painlevé, P.: Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, Bull. Soc. Math. France **28** (1900), 201–261; Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme, Acta Math. **25** (1902), 1–85

[15] Reshetikhin, N.: The Knizhnik-Zamolodchikov system as a deformation of the isomonodromy problem, Lett. Math. Phys. **26** (1992), 167–177